Mathématiques discrètes. L1 Informatique I23

TD6. Arithmétique II.

Leonhard Euler (1707 - 1783). Mathématicien et physicien suisse. Il domine les mathématiques du XVIIIe siècle et développe très largement ce qui s'appelle alors la nouvelle analyse. Complètement aveugle pendant les dix-sept dernières années de sa vie, il produit presque la moitié de la totalité de son travail durant cette période.

"Un enfant de cinq ans comprendrait cela ! Allez me chercher un enfant de cinq ans !" (Groucho Marx)

Exercice 1. Le Quizz.

1. Existe-t-il des entiers a et b vérifiant $2007a + 666b = 1$?
2. Existe-t-il des entiers a et b vérifiant $2007a + 666b = 5$?
3. On suppose que les entiers a et b vérifient $202a + 111b = 6$. Que peut-on dire de leur pgcd ?
4. Existe-t-il mille entiers consécutifs non premiers ?
5. L'entier 247^{349} est-il divisible par 7 ?
6. Combien le polynôme $X^2 - 1$ admet-il de racines dans $\mathbf{Z}/12\mathbf{Z}$?
7. L'entier $n = 561$ satisfait l'assertion suivante : tout entier a qui n'est pas un multiple de p satisfait $a^n \equiv a \pmod n$. L'entier n est-il premier ?
8. On a la congruence suivante : $49002! \equiv -1 \pmod{49003}$. L'entier 49003 est-il premier ?

Exercice 2. Une équation diophantienne

Trouvez toutes les solutions entières de l'équation

$$9x + 23y = 11.$$

Exercice 3. Calcul d'un inverse dans $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$

1. L'entier 14 admet-t-il un inverse modulo 441 ? Si oui, calculez son inverse.
2. L'entier 15 admet-t-il un inverse modulo 892 ? Si oui, calculez son inverse.

Exercice 4. Système de 2 congruences

Déterminez toutes les solutions entières du système :

$$\begin{array}{rcll} n & \equiv & 5 & \pmod 7 \\ n & \equiv & 2 & \pmod{11} \end{array}.$$

Exercice 5. Système de 3 congruences

Déterminez toutes les solutions entières du système :

$$\begin{array}{rcll} n & \equiv & 1 & \pmod 3 \\ n & \equiv & 2 & \pmod 4. \\ n & \equiv & 3 & \pmod 5 \end{array}$$

Exercice 6. Fonction indicatrice d'Euler

On définit la *fonction indicatrice d'Euler* $\varphi : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ définie par

$$\varphi(n) := \#\{k \in \mathbf{N},\ k < n,\ (k, n) = 1\}.$$

Autrement dit, le nombre $\varphi(n)$ désigne le nombre d'entiers naturels inférieurs ou égaux à n et premiers avec n.

1. Calculez les premières valeurs $\varphi(1), \varphi(2), \dots, \varphi(11)$.
2. Calculez $\varphi(p)$ quand p désigne un nombre premier.
3. Calculez $\varphi(p^n)$ quand p désigne un nombre premier et $n \geq 1$.
4. Montrez que $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$ si a et b sont des entiers premiers entre eux.
5. Déduisez de la question précédente que
$$\varphi(n) = n \prod_{p \mid n, p \text{ premier}} \Big(1 - \frac{1}{p}\Big).$$
6. Trouvez tous les entiers n tels que $\varphi(n) = 8$.
7. Trouvez tous les nombres premiers p et q tels que
$$n := pq = 16837 \quad \text{et} \quad \varphi(n) = 16576.$$

Exercice 7. Théorème de Wilson

Déterminer le reste de la division euclidienne de $(103!)^{109}$ par 107.