Mathématiques discrètes. L1 Informatique I23

TD4. Groupe symétrique.

Arthur CAYLEY (1821 - 1895). Avocat d'origine, il sera professeur de Mathématiques à l'université de Cambridge et membre de la Royal Society of London auprès de laquelle il publiera grand nombre de ses travaux notamment sur les géométries non euclidiennnes. Mais son œuvre maîtresse sera le développement d'une nouvelle branche des Mathématiques : l'algèbre linéaire et ses transformations. Il a par ailleurs démontré que tout groupe fini pouvait se plonger dans un groupe de permutations.

> *"Les Mathématiques sont l'art de donner le même nom à des choses différentes"* (Henri POINCARÉ, par opposition à la citation *"La poésie est l'art de donner des noms différents à la même chose"*).

Exercice 1. Le Quizz.

Indiquez pour chaque assertion suivante si elle est vrai ou fausse.

1. Le groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ est d'ordre n. Vrai ou faux ?
2. Le groupe $\mathfrak{S}_n$ est commutatif, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$.
3. La décomposition d'une permutation en produit de transpositions est unique.
4. La décomposition d'une permutation en produit de transpositions se fait toujours avec le même nombre de transpositions.
5. L'ordre d'un p-cycle est égal à p.

Exercice 2.

Soit $\sigma = \binom{1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7}{2\ 1\ 5\ 6\ 3\ 4\ 7}$ et $\tau = \binom{1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7}{6\ 3\ 2\ 1\ 4\ 7\ 5}$. Calculez $\sigma\tau$ et $\tau\sigma$. Ces deux permutations commutent-elles ?

Exercice 3. Commutativité de $\mathfrak{S}_n$

Démontrez que pour tout $n \geq 3$, le groupe $\mathfrak{S}_n$ n'est pas commutatif. Indication : trouvez un contre-exemple pour $n = 3$ et adaptez l'argument pour un $n \geq 3$ quelconque.

Exercice 4. Centre du groupe $\mathfrak{S}_n$

On note $Z(G)$ le centre d'un groupe G, i.e. $Z(G) = \{g \in G \mid \forall x \in G,\ xg = gx\}$. Calculez $Z(\mathfrak{S}_1)$, $Z(\mathfrak{S}_2)$, $Z(\mathfrak{S}_3)$.

Exercice 5. Tri à bulles

Soit $S = [3, 4, 1, 2]$ un tableau qui représente la permutation $\sigma = \binom{1\ 2\ 3\ 4}{3\ 4\ 1\ 2}$. Appliquez le tri à bulles à S et déterminez à chacun des r échanges de termes dans le tableau S, la permutation τ_i correspondante, $i \in \{1, \ldots, r\}$. En déduire la permutation inverse σ^{-1}.

Exercice 6. Puissances et permutations

Soient $\sigma_1 = (1\ 3\ 7\ 6)(2\ 9)$ et $\sigma_2 = \binom{1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9}{2\ 1\ 7\ 6\ 5\ 3\ 4\ 9\ 8}$ deux éléments de $\mathfrak{S}_9$. Calculer ${\sigma_1}^{30}$ et ${\sigma_2}^{24}$.

Exercice 7. Signature

Calculer la signature des permutations suivantes :

$$\sigma_1 = \binom{1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8}{3\ 7\ 6\ 2\ 4\ 8\ 5\ 1}, \sigma_2 = \binom{1\ 2\ 3\ 4\ 5}{2\ 1\ 4\ 5\ 3}, \sigma_3 = \binom{1\ \ 2\ \ 3\ \ 4\ \ 5\ \ 6\ \ 7\ \ 8\ \ 9\ \ 10\ \ 11}{10\ \ 11\ \ 5\ \ 6\ \ 1\ \ 7\ \ 2\ \ 9\ \ 4\ \ 3\ \ 8}.$$

Exercice 8. Groupe symétrique $\mathfrak{S}_3$

Soit $E = \{1, 2, 3\}$ et $\mathfrak{S}_3 = S(E)$ le groupe symétrique de E. On a :

$$\mathfrak{S}_3 = \{e, \tau_1, \tau_2, \tau_3, \sigma_1, \sigma_2\}$$

avec $e = \binom{123}{123}$, $\tau_1 = \binom{1\ 2\ 3}{1\ 3\ 2} = (2\ 3)$, $\tau_2 = \binom{1\ 2\ 3}{3\ 2\ 1} = (1\ 3)$, $\tau_3 = \binom{1\ 2\ 3}{2\ 1\ 3} = (1\ 2)$, $\sigma_1 = \binom{1\ 2\ 3}{2\ 3\ 1} = (1\ 2\ 3)$, $\sigma_2 = \binom{1\ 2\ 3}{3\ 1\ 2} = (1\ 3\ 2)$. Écrire la table de $(\mathfrak{S}_3, \circ)$.

Exercice 9. Générateurs

Soient $n \in \mathbf{N}$ tel que $n \geq 3$ et τ_{ij} la transposition échangeant i et j pour $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ avec $i \neq j$.

1. Vérifier que, pour tout $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ tels que $2 \leq i < j \leq n$, on a :
$$\tau_{ij} = \tau_{1i} \circ \tau_{1j} \circ \tau_{1i}.$$
En déduire que $\{\tau_{1i}, 2 \leq i \leq n\}$ engendre le groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$.
2. Vérifier que, pour tout $i, j \in \{2, \ldots, n\}$ tels que $i \neq j$, on a :
$$(1\ i\ j) = \tau_{1j} \circ \tau_{1i}.$$
En déduire que $\{(1\ i\ j), i, j \in \{2, \ldots, n\}, i \neq j\}$ engendre le groupe alterné $\mathcal{A}_n$.
3. Vérifier que, pour tout $k \in \{3, \ldots, n\}$, on a :
$$\tau_{1k} \circ \tau_{12} = \gamma_k \qquad \text{et} \qquad \tau_{12} \circ \tau_{1k} = \gamma_k^2$$
où $\gamma_k = (1\ 2\ k)$. En déduire que pour tout $i, j \in \{3, \ldots, n\}$:
$$\tau_{1i} \circ \tau_{1j} = \gamma_i \circ \gamma_j^2.$$
En déduire que $\{(1\ 2\ i), 3, \leq i \leq n\}$ engendre le groupe alterné $\mathcal{A}_n$.

Exercice 10. Classes de conjugaison

Deux permutations α et β du groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ sont dites *conjuguées* si et seulement s'il existe une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, telle que

$$\alpha = \sigma\beta\sigma^{-1}.$$

1. Montrez que la relation binaire de conjugaison sur $\mathfrak{S}_n$ est une relation d'équivalence.
2. Montrez que les permutations $\binom{1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9}{3\ 6\ 4\ 7\ 5\ 2\ 1\ 8\ 9}$ et $\binom{1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9}{6\ 2\ 1\ 5\ 4\ 9\ 7\ 8\ 3}$ sont conjuguées.
3. Trouvez toutes les classes de conjugaison du groupe $\mathfrak{S}_4$.