Mathématiques discrètes. L1 Informatique I23

TD3. Analyse combinatoire.

George BOOLE (1815 - 1864). Mathématicien anglais, père de l'Algèbre portant son nom qui est à la base de la logique symbolique, utilisée, non seulement dans l'apprentissage des Mathématiques mais également dans la théorie de l'information, la théorie des graphes, l'informatique et la recherche en intelligence artificielle.

"Il y a 10 sortes d'individus, ceux qui connaissent le binaire et les autres." (Anonyme).

Exercice 1. Le Quizz.

1. Combien y-a-t-il d'applications d'un ensemble E de cardinal n dans un ensemble F de cardinal p ?
2. Combien y-a-t-il de bijections d'un ensemble E de cardinal n dans lui-même ?
3. Combien y-a-t-il d'injections d'un ensemble E de cardinal n dans lui-même ?
4. Combien y a-t-il de tiercés possibles pour une course de 15 partants ?
5. Combien y a-t-il de circuits binaires à huit entrées et une sortie ?
6. Combien y a-t-il de nombres de 3 chiffres écrits avec 3 chiffres deux à deux distincts ?
7. Combien y a-t-il d'anagrammes distinctes du mot ALGORITHMIQUE ?
8. Combien de nombres de 9 chiffres deux-à-deux distincts peut-on former avec les 9 chiffres 1,2,3,4,5,6,7,8,9 ?
9. De combien de façons peut-on remplir une grille de loto (on coche 6 cases sur 49) ?

Exercice 2. Nombre de parties d'un ensemble. I.

Soit E un ensemble fini. Montrez que l'application φ de l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ vers l'ensemble des applications de E dans $\{0,1\}$, noté $\{0,1\}^E$, qui à toute partie A de E fait correspondre sa fonction caractéristique χ_A, est une bijection. En déduire que $\#\mathcal{P}(E) = 2^{\#E}$.

Exercice 3. Nombre de parties d'un ensemble. II.

Soit E un ensemble fini. Montrez par récurrence sur le cardinal de E que $\#\mathcal{P}(E) = 2^{\#E}$.

Exercice 4. Nombre de parties d'un ensemble. III.

1. Montrez que, pour tout $0 \leq p \leq n-1$, on a :
$$\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}.$$
2. Montrez, par récurrence sur n, que si $n \in \mathbf{N}$ et si x et y sont deux éléments d'un anneau qui commutent i.e. $xy = yx$, alors on a (formule du binôme de Newton) :
$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k.$$
3. En déduire que pour tout $n \in \mathbf{N}$:
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n.$$
4. En déduire que si E est un ensemble fini alors $\#\mathcal{P}(E) = 2^{\#E}$.

Exercice 5. Coefficients binomiaux.

1. Montrez que, pour tout $n \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$
$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0.$$
2. Calculez
$$\sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} k \binom{n}{k}.$$

Exercice 6. Paradoxe des anniversaires.

On veut évaluer le plus petit nombre d'élèves en I23 à partir duquel la probabilité que deux élèves soient nés le même jour est supérieure à la probabilité que tous les élèves soient nés un jour différent (on ne tient pas compte de l'année de naissance, uniquement du jour et du mois).

1. Calculez le nombre A_n d'applications de l'intervalle $[1,n]$ dans l'intervalle $[1,365]$. À quoi correspond ce nombre par rapport au problème ?
2. Calculez le nombre I_n d'applications *injectives* de l'intervalle $[1,n]$ dans l'intervalle $[1,365]$. À quoi correspond ce nombre par rapport au problème ?
3. Que représente le nombre $P_n := A_n/I_n$? Vérifiez que
$$P_n = \prod_{i=1}^{i=n-1} \frac{(365-i)}{365}.$$

Calculez la plus petite valeur de n telle que $P_n \leq \frac{1}{2}$. Concluez.