Mathématiques discrètes. L1 Informatique I23

TD2. Applications.

Georg Cantor (1845 - 1918). Né à Saint-Pétersbourg, il fait ses études en Allemagne. A mis au point la Théorie des Ensembles. A le premier démontré que l'ensemble des nombres rationnels (ainsi que l'ensemble des nombres algébriques) est dénombrable, et que l'ensemble des réels ne l'est pas.

> *"To speak algebraically, Mr. M. is execrable, but Mr. G. is* $(x+1)$-*ecrable"* (Edgar Allan Poe).

Exercice 1. Le Quizz.

Considérons l'ensemble E des 10 premiers entiers naturels non nuls et l'ensemble $\mathcal{A}$ des lettres de l'alphabet.

1. Existe-t-il une injection de E dans $\mathcal{A}$? Une surjection ? Une bijection ? Combien existe-t-il d'injections de E sur $\mathcal{A}$?

Soient f et g des applications d'un ensemble E dans lui-même.

2. Si $g \circ f$ est injective alors f l'est aussi. Vrai ou faux ?
3. Si $g \circ f$ est surjective alors f l'est aussi. Vrai ou faux ?
4. Si $g \circ f$ est surjective alors g l'est aussi. Vrai ou faux ?

Exercice 2. Noyau.

Soit f une application linéaire de $E = \mathbf{R}^n$ dans $F = \mathbf{R}^m$ (on rappelle qu'une application linéaire est un morphisme d'espace vectoriel).

1. Montrer que : $f(0_E) = 0_F$ puis que : $f(-x) = -f(x)$ pour tout $x \in E$.
2. On note K l'ensemble suivant :
$$K = \{x \in E \mid f(x) = 0_F\}.$$
Montrer que f est injective si et seulement si $K = \{0_E\}$.

Exercice 3. Dénombrabilité de $\mathbf{Z}$

Soit f l'application de $\mathbf{Q}$ dans $\mathbf{N}$ qui à tout nombre rationnel $r = \frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbf{Z}$ entier relatif et $q \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$ entier naturel non nul, p et q premiers entre eux, associe l'entier naturel $f(r)$ égal à $2^p \times 3^q$ si r est strictement positif, $5^{-p} \times 7^q$ si r est strictement négatif et 0 si r est nul. Montrer que f est injective. On en déduit que l'ensemble des rationnels est dénombrable.

Exercice 4. Méta-injectivité

Soit f une application d'un ensemble E vers lui-même. Démontrer que f est injective si et seulement si pour toutes applications g et h de E vers E on a :
$$(f \circ g = f \circ h \Rightarrow g = h).$$

Exercice 5. Image directe et image inverse

Soient f une application d'un ensemble E dans un ensemble F et A une partie de E. Montrer que
$$A \subset f^{-1}(f(A))$$
et que l'on a l'égalité pour toute partie A de E si et seulement si f est injective. De même, si B est une partie de F montrer que l'on a alors
$$f(f^{-1}(B)) \subset B$$
et que l'on a l'égalité pour toute partie B de F si et seulement si f est surjective.

Exercice 6. Intégrité de $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$

Soit $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ l'anneau des entiers modulo n. Montrer que si $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ est intègre (i.e. $ab = 0$ avec $a, b \in \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ implique $a = 0$ ou $b = 0$) alors tout élément non nul de $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ admet un inverse (i.e. si $a \in \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ est non nul alors il existe $a' \in \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ tel que $aa' = 1$). On pourra considérer l'application
$$\varphi_a : \begin{cases} \mathbf{Z}/n\mathbf{Z} & \longrightarrow \mathbf{Z}/n\mathbf{Z} \\ x & \longmapsto ax \end{cases}$$
pour a non nul dans $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$.