Mathématiques discrètes. L1 Informatique I23.

TD1. Relations d'équivalence.

Ernst STEINITZ (1871 - 1928). Mathématicien allemand influencé par H. Weber et K. Hensel. A donné la première définition de la notion de "corps" en 1910. A démontré que "tout corps admet une clôture algébrique". On lui doit la construction des nombres rationnels ($\mathbf{Q}$) comme classes d'équivalence de couples d'entiers relatifs, pour la relation $(a, b)\,\mathcal{R}\,(c, d)$ si et seulement si $ad = bc$.

"La vie n'est bonne qu'à étudier et à enseigner les Mathématiques."
(Blaise PASCAL).

Exercice 1. Le Quizz.

1. La relation sur $\mathbf{Z}$ définie par $a\mathcal{R}b$ ssi $a = b$ est-elle une relation d'équivalence ?
2. La relation sur $\mathbf{Z}$ définie par $a\mathcal{R}b$ ssi $a \leq b$ est-elle une relation d'équivalence ?
3. La relation sur $\mathbf{Z}$ définie par $a\mathcal{R}b$ ssi a divise b est-elle une relation d'équivalence ?
4. $\mathcal{A} = \{A_1, A_2\}$ avec A_1 l'ensemble des entiers relatifs impairs et A_2 l'ensemble des entiers relatifs pairs est une partition de $\mathbf{Z}$. Vrai ou faux ?
5. La relation binaire sur l'ensemble des droites du plan définie par $D\mathcal{R}D'$ ssi D est perpendiculaire à D' est-elle une relation d'équivalence ?
6. La relation binaire sur l'ensemble des droites du plan définie par $D\mathcal{R}D'$ ssi D est parallèle à D' est-elle une relation d'équivalence ?Nom
7. La relation binaire sur l'ensemble $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients dans R définie par $A\mathcal{R}B$ ssi il existe une matrice inversible P de $\mathcal{M}_2(\mathbf{R}^*)$ telle que $A = PBP^{-1}$ est-elle une relation d'équivalence ?

Exercice 2. Nombre de relations.

Soit E un ensemble fini de cardinal n.

1. Déterminer le nombre de relations binaires sur E.
2. Déterminer le nombre de relations binaires réflexives sur E.
3. Déterminer le nombre de relations binaires réflexives et symétriques sur E.
4. Déterminer le nombre de relations d'équivalence sur E si $n = 4$.

Exercice 3. Entiers modulo n

Soit n un entier naturel. On définit dans $\mathbf{Z}$ la relation binaire suivante : si a et b sont deux entiers relatifs, a est dit congru à b modulo n, que l'on écrit

$$a \equiv b \pmod{n}$$

si et seulement s'il existe un entier $k \in \mathbf{Z}$ tel que $a - b = kn$. Montrer que c'est une relation d'équivalence. Quel est le cardinal de l'ensemble quotient, noté $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$? Montrer que $a \equiv b \pmod{n}$ ssi a et b ont même reste dans la division euclidienne par n.

Exercice 4. Droites projectives.

On définit sur $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ la relation binaire suivante : pour (a_0, a_1) et (b_0, b_1) dans $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, on dit que $a\mathcal{R}b$ si et seulement s'il existe $k \in \mathbf{R}^*$ tel que $a_0 = kb_0$ et $a_1 = kb_1$. Montrer que c'est une relation d'équivalence. On note $\mathbb{P}^1(\mathbf{R})$ l'ensemble quotient, qui est appelé la droite projective réelle. Montrer que $\mathbb{P}^1(\mathbf{R})$ admet un point supplémentaire appelé point à l'infini.

Exercice 5. Décomposition canonique d'une application.

Soit $f : E \longrightarrow F$ une application entre deux ensembles E et F. On définit sur E la relation binaire suivante : pour $(x, y) \in E^2$, $x\mathcal{R}y$ ssi $f(x) = f(y)$. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence. Montrer que la correspondance $g : E/\mathcal{R} \longrightarrow F$ qui à la classe de l'élément x de E fait correspondre $f(x)$ est une application bien définie et qu'elle est injective.

Exercice 6. Graphes et matrices.

Ecrire le graphe et la matrice des relations binaires sur l'ensemble $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ suivantes, et dire si elles sont réflexives, symétriques ou transitives.

$\mathcal{R}_1 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (1, 3), (3, 4)\}$

$\mathcal{R}_2 = \{(1, 1), (1, 2), (1, 5), (2, 1), (2, 2), (2, 5), (3, 3), (3, 5), (4, 4), (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 5)\}$.

$\mathcal{R}_3 = \{(1, 2), (2, 3), (1, 3), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (2, 2), (3, 2)\}$.

$\mathcal{R}_4 = E \times E$.

$\mathcal{R}_5 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5)\}$.

$\mathcal{R}_6 = \mathcal{R}_5 \cup \{(1, 2), (2, 1), (1, 3), (3, 1), (2, 3), (3, 2), (4, 5), (5, 4)\}$.