Memento 1/6 - Ensembles, relations, graphes.

1. Assertions et prédicats

Une *assertion* est une affirmation qui a une valeur de vérité (*vrai* ou *faux*). Un *prédicat* est un énoncé qui contient un ou plusieurs éléments variables et qui devient une assertion une fois la ou les variables instanciées.

"Il pleut" est une assertion, "n est un entier pair" ou encore "$x \leq y$" sont des prédicats. Les connecteurs logiques unaire $\neg$ (négation avec un seul opérande) et binaires $\vee$ (*ou*), $\wedge$ (*et*), $\Rightarrow$ (*implication*), $\Leftrightarrow$ (*équivalence*) permettent de construire des *formules logiques* à partir d'autres assertions/prédicats.

Deux formules logiques F et G sont dites *tautologiquement équivalentes*, ce que l'on note $F \equiv G$ si elles ont toujours même valeur de vérité. Une *table de vérité* d'une formule liste toutes les valeurs logiques possibles de la formule en fonction de la valeur logique des élements qui composent la formule (cf. table des connecteurs ci-dessous).

On rappelle que l'*implication* $A \Rightarrow B$ est définie par la formule $\neg A \vee B$ tautologiquement équivalente à sa *contraposée* $\neg B \Rightarrow \neg A$. L'*équivalence* $A \Leftrightarrow B$ est définie par la double implication $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$. Les deux lois de De Morgan sont $\neg(A \vee B) \equiv (\neg A \wedge \neg B)$ et $\neg(A \wedge B) \equiv (\neg A \vee \neg B)$.

$\boldsymbol{A}$	$\boldsymbol{B}$	$\boldsymbol{\neg A}$	$\boldsymbol{A \vee B}$	$\boldsymbol{A \wedge B}$	$\boldsymbol{A \Rightarrow B}$	$\boldsymbol{A \Leftrightarrow B}$
F	***F***	*V*	*F*	*F*	*V*	*V*
F	***V***	*V*	*V*	*F*	*V*	*F*
V	***F***	*F*	*V*	*F*	*F*	*F*
V	***V***	*F*	*V*	*V*	*V*	*V*

2. Théorie des ensembles

La théorie des ensembles établit les règles de construction de nouveaux ensembles à partir de l'ensemble séminal des entiers naturels $\mathbf{N}$. Elle s'appuie sur la logique propositionnelle et la logique des prédicats à l'aide des quantificateurs existentiel $\exists$ (*il existe*), et universel $\forall$ (*quel que soit*), des symboles particuliers $=$ (*égal*) et $\in$ (*appartient*) et des *axiomes* qui sont des énoncés admis vrais. C'est l'axiome de *l'infini* ("il existe un ensemble naturel") qui fournit l'ensemble $\mathbf{N}$. L'axiome d'*extension "Si A et B sont deux ensembles alors $A = B \Leftrightarrow (A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A)$"* est utilisé en permanence, tout comme l'axiome de *sélection*, *"Soit E un ensemble et $P(x)$ un prédicat, alors l'ensemble $\{x \in E \mid P(x)\}$ existe"* qui permet de sélectionner les éléments d'un ensemble E qui satisfont le prédicat $P(x)$.

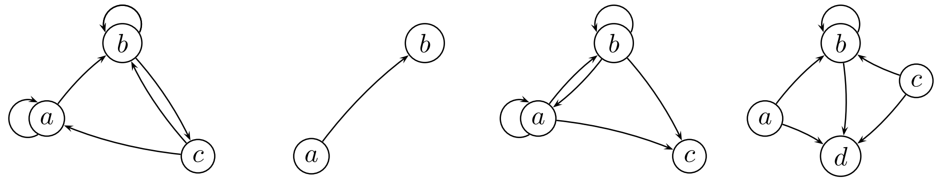
Si E désigne un ensemble, l'axiome *des parties* assure l'existence de l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ des *parties* de E. Par exemple, $\mathcal{P}(\{a,b\}) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}$. On définit $(a,b) := \{\{a\},\{a,b\}\}$ appelé *couple a, b* qui se distingue de la *paire* $\{a,b\}$ par l'importance de l'ordre des termes et on montre que $(a,b) = (c,d) \Leftrightarrow (a = c) \wedge (b = d)$. L'ensemble des couples (a,b) constitués par des élements $a \in E$ et $b \in F$ est noté $E \times F$ et appelé *produit cartésien* de E et de F. On appelle *graphe* tout ensemble de couples.

3. Relations binaires

Une *relation binaire* sur un ensemble E est un prédicat R à deux variables x et y appartenant à un ensemble E. On utilise généralement la notation infixe $x\ R\ y$ (parfois préfixe $R(x,y)$ ou postfixe $(x,y)R$). On appelle *graphe* de la relation binaire R l'ensemble $\{(x,y) \in E \times E \mid x\ R\ y\}$.

Une relation binaire est dite *réflexive* si tous les éléments de E sont en relation avec eux-même, i.e. $\forall x \in E,\ x\ R\ x$; elle est *symétrique* si $\forall (x,y) \in E \times E,\ x\ R\ y \Rightarrow y\ R\ x$; elle est *transitive* si $\forall (x,y,z) \in E^3,\ (x\ R\ y) \wedge (y\ R\ z) \Rightarrow x\ R\ z$. La relation est *antiréflexive* si *aucun* sommet n'est en relation avec lui-même et *antisymétrique* si deux sommets distincts x et y ne sont *jamais* en relation "dans les deux sens", ce que l'on traduit par $\forall (x,y) \in E \times E,\ (x\ R\ y) \wedge (y\ R\ x) \Rightarrow (x = y)$.

L'antisymétrie *n'est pas* la négation de la symétrie tout comme l'antiréflexivité n'est pas la négation de la réflexivité. Il suffit *qu'un seul* sommet x ne soit pas en relation avec lui-même pour que la relation ne soit pas réflexive, *aucun* ne doit être en relation avec lui-même pour qu'elle soit antiréflexive. Idem pour le distingo entre non-symétrie et antisymétrie. On représente classiquement une relation binaire de manière sagitale à l'aide de son graphe en reliant par une flèche x à y tout couple (x,y) tel que $x\ R\ y$.



De gauche à droite : le premier graphe n'est ni réflexif (c n'est pas en relation avec lui-même), ni symétrique (a est en relation avec b mais b n'est pas en relation avec a) ni transitif ($c \to a \to b \to c$ donc c devrait être en relation avec lui-même). Le deuxième graphe est antisymétrique et transitif. Le troisième n'est pas réflexif ni symétrique mais est transitif. Le dernier est antisymétrique et transitif.

On dispose également d'une représentation par matrice d'adjacence qui est une matrice carrée dont les lignes et les colonnes sont indexées par les éléments de l'ensemble E sur lequel est définie la relation binaire R. Le terme sur la ligne x et la colonne y contient 1 si $x\ R\ y$ et 0 sinon. L'exemple ci-dessous correspond au graphe de droite au-dessus :

$$\begin{array}{c|cccc} & a & b & c & d \\ \hline a & 0 & 1 & 0 & 1 \\ b & 0 & 1 & 0 & \mathbf{1} \\ c & 0 & \mathbf{1} & 0 & \mathbf{1} \\ d & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

La réflexivité d'une relation binaire se traduit sur la matrice par une diagonale dont tous les termes sont égaux à 1. La symétrie de la matrice par rapport à cette diagonale assure la symétrie de la relation. La transitivité se matérialise par un "triangle" de 1 pour chaque triplet (x,y,z) tel que $x \to y$ et $y \to z$, c'est le cas du triplet (c,b,d) pour lequel les $\mathbf{1}$ sont en gras dans la matrice.