Memento 3/6 - Combinatoire.

1. Equipotence, cardinalité

Deux ensembles E et F sont dits *équipotents*, et on écrit $E \approx F$, s'il existe une bijection $f : E \to F$. Un ensemble E est dit *fini* s'il existe un entier n, appelé *cardinal de* E et noté $\#E$, tel que $E \approx [1, n]$ (dans le cas contraire E est dit *infini*).

Théorème 1. *Si E et F sont finis et de même cardinal, alors l'application f est injective si et seulement si elle est surjective.*

Théorème 2 (de récurrence). *Soit $P(n)$ un prédicat sur $\mathbf{N}$ et $a \in \mathbf{N}$. Si $P(n)$ satisfait les deux propriétés suivantes :*

(1) *$P(a)$ est vrai,*

(2) $\forall n \in \mathbf{N}, \quad P(n) \Rightarrow P(n+1)$,

alors $P(n)$ est vrai pour tout entier $n \geq a$.

2. Formulaire

Nombre de **couples** d'éléments de E et F.

$$\boxed{\#(E \times F) = n.p \quad \text{où } n = \#E \text{ et } p = \#F.}$$

Nombre **d'applications** de E dans F.

$$\boxed{\#F^E = p^n \quad \text{où } n = \#E \text{ et } p = \#F.}$$

Nombre de **parties** de E.

$$\boxed{\#\mathcal{P}(E) = 2^n \quad \text{où } n = \#E.}$$

Nombre d'**injections** de E dans F.

$$\boxed{A_n^p := \frac{n!}{(n-p)!} \quad \text{où } p = \#E \text{ et } n = \#F.}$$

Nombre de **bijections** de E dans E.

$$\boxed{\#\mathfrak{S}_n = n! \quad \text{où } n = \#E.}$$

Nombre de **parties** de E **de cardinal** p.

$$\boxed{\#\mathcal{P}_k(E) = \frac{n!}{(n-p)!p!}, \text{ noté } \binom{n}{p} \text{ ou } C_n^p \quad \text{avec } n = \#E.}$$

Nombre de **façons de ranger** n **objets dans** p **boites numérotées**.

$$\boxed{R_n^p := \frac{(p+n-1)!}{(p-1)!.}}$$

Nombre d'**applications croissantes** d'un ensemble totalement ordonné E dans un ensemble totalement ordonné F.

$$\boxed{\frac{R_n^p}{n!}, \quad \text{où } n = \#E \text{ et } p = \#F.}$$

Nombre de **partitions** de E (nombres de Bell) est donné par la relation de récurrence suivante :

$$\boxed{B_{n+1} := \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k, \quad \text{avec } B_0 = 1 \text{ et } n = \#E.}$$

Nombre de **partitions de** E **en** p **classes** (nombres de Stirling) est donné par la relation de récurrence suivante :

$$\boxed{S_{n+1}^p := S_n^{p-1} + pS_n^p = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} S_k^{p-1}, \quad \text{avec } S_n^1 = S_n^n = 1 \text{ et } n = \#E.}$$

Nombre de **surjections** de E dans F.

$$\boxed{p!S_n^p, \quad \text{où } n = \#E \text{ et } p = \#F.}$$

3. Quelques lemmes

Soient p et n deux entiers tels que $0 \leq p \leq n$.

$$\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1} \qquad \text{(base du triangle de Pascal)}$$

$$\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p} \quad \text{et} \quad \binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$$

Lemme 3 (du binôme de Newton). *Soient a et b deux éléments d'un anneau commutatif :*

$$(a+b)^n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} a^p b^{n-p}.$$

Lemme 4 (des trous de pigeons ou des tiroirs). *Si on range n objets dans p boites, alors une des boites contient au moins $[n/p]$ objets où $[x]$ est la partie entière du réel x.*

Lemme 5 (de sommation). *Si $(E_i)_{\,i \in I}$ est une partition d'un ensemble fini E, alors*

$$\#E = \sum_{i \in I} \#E_i.$$

Lemme 6 (des bergers). *Soient E et F finis et $f : E \to F$ une surjection telle que tout élément de F admet exactement k antécédents, alors*

$$\#E = k\#F.$$