Memento 2/6 - Applications, relations

1. Correspondances et fonctions

On appelle *correspondance* entre deux ensembles E et F, un triplet (E, F, Γ) où $\Gamma \subseteq E \times F$. On appelle E l'*ensemble de départ*, F l'*ensemble d'arrivée* et Γ le *graphe* de la correspondance. On appelle *image* de $x \in E$ tout élément $y \in F$ tel que $(x, y) \in \Gamma$. Soit $y \in F$, on appelle *antécédent* de y tout $x \in E$ tel que $(x, y) \in \Gamma$.

Une correspondance $f = (E, F, \Gamma)$ est dite *fonctionnelle* ou plus simplement *fonction* si chaque élément de E a *au plus* une image. On dit qu'une fonction $f = (E, F, \Gamma)$ est *définie* en $x \in E$ si x admet une image y et on la note $f(x)$. Le *domaine de définition* d'une fonction f est donc le sous-ensemble noté $\mathcal{D}_f$ de E dont les élements admettent une image par f. Plutôt que $f = (E, F, \Gamma)$, on note souvent

$$\begin{aligned} f : E &\to F \\ x &\mapsto y \end{aligned}$$

On étend la définition d'une fonction f aux parties A de E, et l'*image directe de A* notée abusivement $f(A)$ est l'ensemble des images des éléments de A par f, i.e. $f(A) := \{f(x) \mid x \in A\}$. Réciproquement, si $B \subseteq F$, on appelle *image réciproque de B* le sous-ensemble $\{x \in E \mid f(x) \in B\}$ de E, noté abusivement $f^{-1}(B)$. Une partie A d'un ensemble E est dite *stable* par $f : E \to E$, si $f(A) \subseteq A$ et *invariante* par f si $f(A) = A$.

2. Injections, surjections et bijections

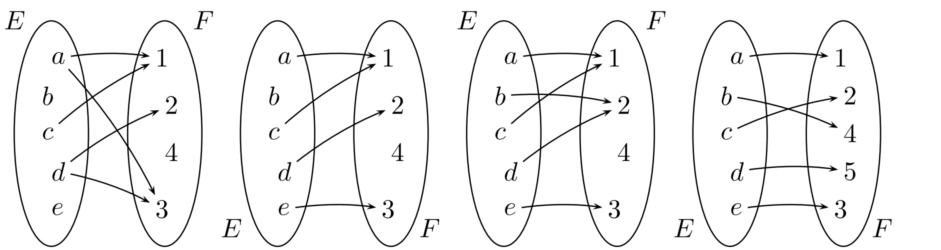
Une fonction $f = (E, F, \Gamma)$ telle que $\mathcal{D}_f = E$ est appelée *application*. Une application telle que deux éléments distincts de E ont des images distinctes, i.e. $\forall (x, x') \in E \times E, \quad x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')$ est appelée *injection*. La forme contraposée est souvent plus utile,

$$\forall (x, x') \in E \times E, \quad f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'.$$

Une application est une *surjection* si tout élément de F admet au moins un antécédent :

$$\forall y \in F, \exists x \in E, \quad y = f(x).$$

Une application à la fois injective et surjective est une *bijection*.



De gauche à droite : une correspondance; une fonction qui n'est pas une application (c n'a pas d'image); une application qui n'est ni injective (1 a deux antécédents), ni surjective (4 n'a pas d'antécédent); une bijection.

La *restriction* d'une application $f = (E, F, \Gamma)$ à une partie $A \subseteq E$ est l'application notée $f|_A = (A, F, \Gamma_A)$ où $\Gamma_A := \{(x, y) \in \Gamma \mid x \in A\}$. Réciproquement on dit qu'une application $g : E' \to F'$ est un *prolongement* d'une fonction $f : E \to F$ si $E \subseteq E'$, $F \subseteq F$ et si $\forall x \in E$, $f(x) = g(x)$.

Soient deux applications $f : E \to F$ et $g : F \to G$. L'application de E dans G définie par $x \mapsto g(f(x))$ est appelée *composée* de f et g et on la note $g \circ f$. On montre que la loi $\circ$ est associative, i.e. que $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ ce qui permet d'omettre les parenthèses.

Soit I et E deux ensembles. On appelle *famille* d'éléments de E d'ensemble d'indexation I toute application f de $I \to \mathcal{P}(E)$ que l'on note $(E_i)_{i \in I}$. Cette famille constitue une *partition* de E si elle satisfait les trois assertions :

(1) $\forall i \in I, \ E_i \neq \varnothing$;

(2) $\forall (i, j) \in I \times I, i \neq j \Rightarrow E_i \cap E_j = \varnothing$;

(3) $\bigcup_{i \in I} E_i = E$.

3. Relations d'équivalence

On appelle *relation d'équivalence* toute relation binaire réflexive, symétrique et transitive. Soit R une relation d'équivalence sur E et $x \in E$. L'ensemble $\overline{x} := \{y \in E \mid x \, R \, y\}$ est appelé *classe d'équivalence de x*.

L'ensemble des classes d'équivalence est noté $E/\,R$, on l'appelle l'ensemble *quotient* de E par R. Cet ensemble constitue une *partition* de E. Réciproquement, toute partition $(E_i)_{i \in I}$ d'une ensemble E donne naissance à une relation d'équivalence R sur E, en posant $x \, R \, y$ si et seulement s'il existe $i \in I$ tel que $x \in E_i$ et $y \in E_i$.

4. Relations d'ordre

On appelle *relation d'ordre* toute relation binaire réflexive, antisymétrique et transitive. Un ensemble muni d'une relation d'ordre est dit *ordonné*.

On dit que deux élements x et y d'un ensemble ordonné (E, R) sont *comparables* si $x \, R \, y$ ou $y \, R \, x$. Si tous les élements sont deux-à-deux comparables, l'ordre est dit *total* sinon *partiel*. L'ordre naturel $\leq$ sur les entiers naturels est une relation d'ordre total. La relation d'inclusion $\subseteq$ sur l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ des parties d'un ensemble E est une relation d'ordre partiel (les paires $\{a, b\}$ et $\{b, c\}$ ne sont pas comparables dans $\mathcal{P}(\{a, b, c\})$).

Soit E un ensemble ordonné et A une partie de E. S'il existe un élement de A qui est plus petit (resp. plus grand) que tous les autres éléments de A, alors il est nécessairement unique et on l'appelle *minimum (resp. maximum) de A* ou *le plus petit (resp. plus grand) élément de A*, on le note $\min A$ (resp. $\max A$). Pour $(\mathbf{N}, \leq)$, 0 est le plus petit élément mais il n'y a pas de plus grand élément. On appelle *minorant* (resp. *majorant*) d'une partie A d'un ensemble ordonné E, tout élement $m \in E$ (resp. M) tel que $\forall x \in A, \ m \, R \, x$ (resp. $\forall x \in A, \ x \, R \, M$.) Le plus petit des majorants (resp. le plus grand des minorants) d'une partie , s'il existe est appelé la *borne supérieure de A* (resp. la *borne inférieure de A* et on note $\sup A$ (resp. $\inf A$).

Quand un ordre est partiel, on appelle *élément maximal* (resp. *minimal*) tout élement qui est plus grand (resp. plus petit) que tous les éléments avec lesquels il est comparable. La relation de divisibilité définie sur $\mathbf{N}$ par $a \mid b$ s'il existe $c \in \mathbf{N}$ tel que $ac = b$ est une relation d'ordre partiel et les nombres premiers sont les éléments minimaux de $\mathbf{N} \setminus \{0\}$.