

I 23. Mathématiques pour l'informatique — Examen

Lundi 27 juin 2011 [T'301, 08h00 - 10h00]

Les documents sont interdits. La calculatrice est autorisée. Le barème est basé sur la résolution de 4 des 6 exercices (1/2 heure par exercice environ) notés sur 4 points chacun approximativement. Toutes les réponses doivent être *justifiées* ! Durée : 2h00.

Exercice 1. [4pts] Les fonctions $f : E \rightarrow F$ suivantes sont-elles : injectives, surjectives, bijectives ?

- (1) E est l'ensemble des étudiants inscrits en I23, $F := [0, 20]$ et f est l'application qui, à un étudiant, associe sa note de contrôle écrit de I23 de la première session sachant que l'absence à l'examen est sanctionnée par un 0.
- (2) $E := \mathbf{Z}$, $F := \mathbf{N}$ et $f(x) := x^2$;
- (3) $E := \mathbf{R}_+ \setminus \{0\}$, $F := \mathbf{R}_+ \setminus \{0\}$ et $f(x) := 1/x$;
- (4) E est un ensemble quelconque de cardinal n et F de cardinal m avec $n \geq m$.
- (5) E est un ensemble quelconque et $F := E \times E$ avec $f(x) := (x, x)$.

Exercice 2. [4pts] On constitue une grille de loto en cochant 6 des numéros compris entre 1 et 49.

- (1) Combien peut-on constituer de grilles distinctes ?
- (2) Combien peut-on constituer de grilles distinctes avec des numéros pairs uniquement, impairs uniquement ?
- (3) Combien peut-on constituer de grilles avec 6 numéros consécutifs ?
- (4) Combien peut-on constituer de grilles de manière à ce qu'au plus 3 numéros soient compris entre 1 et 9 ?

Sachant qu'il faut une seconde pour cocher une case, combien faudrait-il de temps pour constituer l'ensemble de toutes les grilles possibles ?

Exercice 3. [4pts] On définit une relation binaire \mathcal{R} sur l'ensemble des applications de \mathbf{R} dans \mathbf{R} par : $f \mathcal{R} g$ si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que $\forall x \in \mathbf{R}$, $f(x) - g(x) = \lambda$. Démontrez qu'il s'agit d'une relation d'équivalence.

Démontrez que la relation de divisibilité définie par $a|b$ si et seulement si il existe $k \in \mathbf{N}$ tel que $ak = b$ sur l'ensemble $\mathbf{N} \setminus \{1\}$ est une relation d'ordre. Montrez qu'il s'agit d'une relation d'ordre partiel. Quels sont les éléments minimaux pour cette relation ?

Exercice 4. [4pts] Considérons la permutation

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 7 & 10 & 2 & 9 & 5 & 4 & 6 & 8 & 1 \end{pmatrix}$$

comme élément du groupe symétrique \mathfrak{S}_{10} . Décomposer la permutation σ en produit de cycles à supports disjoints. Déterminer l'ordre et la signature de σ puis déterminer σ^{2011} .

Exercice 5. [4pts] Calculez les carrés de chacun des éléments de $\mathbf{Z}/12\mathbf{Z}$. En déduire l'ensemble des solutions dans $\mathbf{Z}/8\mathbf{Z}$ des équations suivantes :

$$X^2 - X = 0$$

$$X^2 - 1 = 0.$$

Le nombre 113 est-il inversible modulo 455 ? Si oui calculez son inverse dans $\mathbf{Z}/455\mathbf{Z}$.

Exercice 6. [4pts] On considère la matrice de contrôle H d'un code linéaire C de longueur 4 sur \mathbf{F}_3 .

$$H = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Déterminez la matrice génératrice G de ce code. En notant $u = (x, y, z, t)$ un vecteur de \mathbf{F}_3^4 , écrivez les deux équations que doivent satisfaire x, y, z et t pour que u appartienne au code C (i.e. $H({}^t u) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, où ${}^t u$ désigne le vecteur u en colonne). Enumérez tous les quadruplets de \mathbf{F}_3^4 qui satisfont ces deux équations. Calculez la capacité de correction de ce code.