

I 23. Mathématiques Discrètes – Session 2

Vendredi 29 septembre 2008

Les documents *et* la calculatrice sont interdits. Le barème est approximatif et il est donné à titre indicatif.

Exercice 1. [7pts] On veut évaluer le plus petit nombre n d'étudiants inscrits en I23 à partir duquel la probabilité que deux étudiants soient nés le même jour est supérieure à la probabilité que tous les étudiants soient nés un jour différent (on ne tient pas compte de l'année de naissance, uniquement du jour et du mois de naissance). On supposera que $0 < n < 365$.

- [2pts] Donnez l'expression du nombre A_n d'applications de l'ensemble $\{1, 2, \dots, n\}$ dans l'ensemble $\{1, 2, \dots, 365\}$. À quoi correspond ce nombre par rapport au problème?
- [2pts] Calculez le nombre I_n d'applications *injectives* de l'intervalle $[1, n]$ dans l'intervalle $[1, 365]$. À quoi correspond ce nombre par rapport au problème?
- [3pts] Que représente le nombre $P_n := 1 - I_n/A_n$? Vérifiez que

$$I_n/A_n = \prod_{i=1}^{n-1} \frac{(365-i)}{365}.$$

À l'aide d'une calculatrice on obtient les deux résultats suivants :

$$I_{22}/A_{22} > 1/2 \quad \text{et} \quad I_{23}/A_{23} < 1/2.$$

Que concluez-vous?

Exercice 2. [3pts] Considérons la permutation

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 4 & 7 & 5 & 2 & 3 & 8 & 1 & 9 & 6 \end{pmatrix}$$

comme élément du groupe symétrique \mathfrak{S}_9 .

- [1pt] Décomposer la permutation σ en produit de cycles à supports disjoints.
- [2pts] Déterminer l'ordre et la signature de σ puis déterminer σ^8 .

Exercice 3. [4pts]

- [2pts] Trouver une solution entière à l'équation

$$7x + 25y = 1.$$

- [2pts] Déterminer alors *toutes* les solutions entières de cette équation.

Exercice 4. [5pts] Soit C le code linéaire binaire de matrice génératrice

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- [1pt] Déterminer la longueur n et la dimension k du code C .
- [2pts] Combien y a-t-il de mots dans le code C ? Enumérer les mots du code et en déduire la distance minimale d du code C et sa capacité de correction.
- [1pt] Quels sont les bits de redondance si l'on veut envoyer le message $u = (a, b, c)$?
- [1pt] Que déduire si le message $(1, 1, 1, 1, 1, 0)$ est reçu?

Exercice 5. [2pts] Écrivez la table de multiplication de $\mathbf{Z}/9\mathbf{Z}$.