I 23. Mathématiques pour l'informatique — Examen

Lundi 21 mai 2012 [S112, 09h00 - 11h00]

Les documents sont interdits. La calculatrice est autorisée. Le barème est basé sur la résolution de 4 des 6 exercices (1/2 heure par exercice environ) notés sur 5 points chacun approximativement. Toutes les réponses doivent être *justifiées* ! Durée : 2h00.

Exercice 1. [5pts] Pour chacune des fonctions $f : E \to F$ suivantes indiquez si elle est : injective, surjective, bijective ?

(1) E est l'ensemble des 63 étudiants inscrits en I23, $F := [0, 20]$ et f est l'application qui à un étudiant associe sa note de contrôle écrit de I23 de la première session sachant que l'absence à l'examen est sanctionnée par un 0.

(2) $E := \mathbf{Z}$, $F := \mathbf{Z}/10\mathbf{Z}$ et $f(x) := x \mod 10$;

(3) $E := \mathbf{R}_+ \setminus \{0\}$, $F := \mathbf{R}_+ \setminus \{0\}$ et $f(x) := 1/x$;

(4) E est un ensemble quelconque de cardinal n et F de cardinal m avec $n \geq m$.

(5) E est un ensemble quelconque et $F := E \times E$ avec $f(x) := (x, x)$.

Exercice 2. [5pts] On constitue une grille de loto sportif sur 15 matchs en cochant 1, N ou 2 pour chacun des 15 matchs.

(1) Combien peut-on constituer de grilles distinctes ? Sachant qu'il faut une seconde pour cocher une case, il faut donc 15 secondes pour rédiger une grille, mais combien faudrait-il de temps pour constituer l'ensemble de toutes les grilles possibles ?

(2) Combien peut-on constituer de grilles distinctes si l'on s'interdit de cocher le nul N pour exactement 5 maths ?

(3) Avec 30 équipes de foot, combien y-a-t-il de possibilités de constituer les 15 équipes qui vont recevoir leurs adversaires ?

(4) Avec 30 équipes de foot, combien de rencontres de 15 matchs peut-on organiser pour constituer la grille du loto sportif ?

Exercice 3. [5pts] On définit une relation binaire $\mathcal{R}$ sur l'ensemble des applications de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ par : $f\ \mathcal{R}\ g$ si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que $\forall x \in \mathbf{R},\ f(x) - g(x) = \lambda$. Démontrez qu'il s'agit d'une relation d'équivalence.

Démontrez que la relation de divisibilité définie par $a|b$ si et seulement s'il existe $k \in \mathbf{N}$ tel que $ak = b$ sur l'ensemble $\mathbf{N}\setminus\{1\}$ est une relation d'ordre. Montrez qu'il s'agit d'une relation d'ordre partiel. Quels sont les éléments minimaux pour cette relation ?

Exercice 4. [5pts] Considérons la permutation

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 7 & 10 & 2 & 9 & 5 & 4 & 6 & 8 & 1 \end{pmatrix}$$

comme élément du groupe symétrique $\mathfrak{S}_{10}$. Décomposer la permutation σ en produit de cycles à supports disjoints. Déterminer l'ordre et la signature de σ puis déterminer σ^{2011}.

Exercice 5. [5pts] Calculez les carrés de chacun des éléments de $\mathbf{Z}/12\mathbf{Z}$. En déduire l'ensemble des solutions dans $\mathbf{Z}/12\mathbf{Z}$ des équations suivantes :

$$X^2 - X = 0$$

$$X^2 - 1 = 0.$$

Le nombre 113 est-il inversible modulo 455 ? Si oui calculez son inverse dans $\mathbf{Z}/455\mathbf{Z}$.

Exercice 6. [5pts] On considère la matrice de contrôle H d'un code linéaire C de longueur 4 sur $\mathbf{F}_3$.

$$H = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Déterminez la matrice génératrice G de ce code. En notant $u = (x, y, z, t)$ un vecteur de $\mathbf{F}_3^4$, écrivez les deux équations que doivent satisfaire x, y, z et t pour que u appartienne au code C (i.e. $H({}^t u) = \binom{0}{0}$, où ${}^t u$ désigne le vecteur u en colonne). Enumérez tous les quadruplets de $\mathbf{F}_3^4$ qui satisfont ces deux équations. Calculez la capacité de correction de ce code.