Université du Sud Toulon-Var — Licence d'Informatique

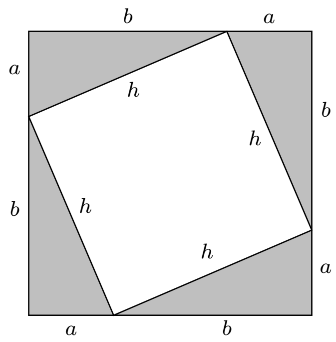
I 23 : Mathématiques discrètes

Examen - 1ère session 2009/2010.

Jeudi 20 mai 2010 [9h $\to$ 11h, S111]

Les documents sont interdits. La calculatrice est autorisée. Le barème est approximatif et il est donné à titre indicatif. Durée : 2h00.

Exercice 1. [4pts] Démontrez le théorème de Pythagore en calculant de deux manières différentes la surface du grand carré de côté $a+b$ ci-dessous :



Exercice 2. [4pts] On considère l'application $f : E \to F$ où E désigne l'ensemble des n étudiants présents à cet examen et F désigne l'ensemble des 21 notes $0, 1, 2, \ldots, 20$ possibles. Donnez une condition nécessaire sur n pour que f soit

(1) injective ;

(2) surjective ;

(3) bijective.

La relation $\mathcal{R}$ définie sur l'ensemble des étudiants E par $x \mathrel{\mathcal{R}} y$ si et seulement si $|f(x) - f(y)| \leq 1$ (i.e. ils ont la même note à 1 point près) est-elle

(1) réflexive ?

(2) symétrique ?

(3) transitive ?

S'agit-il d'une relation d'équivalence ? Justifiez vos réponses.

Exercice 3. [6pts] Un sujet d'examen propose 7 exercices à 5 points. Un étudiant n'a le temps matériel de répondre qu'à 4 de ces exercices. Combien l'étudiant a-t-il de façons de choisir ces 4 exercices parmi les 7 proposés ? Une fois qu'il a choisi les 4 exercices, il peut les rédiger dans l'ordre de son choix. De combien de façons peut-il ordonner ces 4 exercices sur sa copie ?

Le prof décide de noter les deux premiers exercices de chaque copie au hasard. Pour celà il jette deux dés, additionne les valeurs obtenues et retire 2 pour que le total soit toujours compris entre 0 et 10. Calculez pour chaque total $n \in [0, 10]$ possible sa probabilité p_n (indication : dressez la table 6×6 des notes en fonction des deux valeurs obtenues). Quelle note un étudiant peut-il espérer pour ces deux exercices (indication : calculez la moyenne des 11 notes n possibles pondérées par leur probabilité p_n.)

Exercice 4. [3pts] Considérons la permutation

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 7 & 1 & 2 & 9 & 5 & 4 & 6 & 8 \end{pmatrix}$$

comme élément du groupe symétrique $\mathfrak{S}_9$. Décomposer la permutation σ en produit de cycles à supports disjoints. Déterminer l'ordre et la signature de σ puis déterminer σ^8.

Exercice 5. [3pts] Décomposer l'entier 539 en produit de facteurs premiers en utilisant explicitement les critères de divisibilité étudiés en TD. Calculer le nombre d'éléments inversibles de l'anneau $\mathbf{Z}/539\mathbf{Z}$ en utilisant les propriétés de la fonction indicatrice d'Euler ϕ.

Exercice 6. [3pts] Déterminez deux entiers u et v tels que

$$35u + 11v = 1$$

à l'aide de l'algorithme d'Euclide étendu.