Université du Sud Toulon-Var — Licence d'Informatique

I 23 : Mathématiques discrètes

Examen - 1ère session 2007/2008.

Lundi 2 juin 2008

Les documents *et* la calculatrice sont interdits. Le barème est approximatif et il est donné à titre indicatif.

Exercice 1. [3pts] Considérons la permutation

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 7 & 1 & 2 & 9 & 5 & 4 & 6 & 8 \end{pmatrix}$$

comme élément du groupe symétrique $\mathfrak{S}_9$.

1. [1pt] Décomposer la permutation σ en produit de cycles à supports disjoints.

2. [2pt] Déterminer l'ordre et la signature de σ puis déterminer σ^8.

Exercice 2. [4pts]

1. [2pts] Trouver une solution entière à l'équation

$$21x + 13y = 1.$$

2. [2pts] Déterminer alors *toutes* les solutions entières de cette équation.

Exercice 3. [8pts] On considère la relation binaire sur l'ensemble $\mathbf{Z}$ des entiers relatifs définie de la manière suivante :

$$a \equiv b \pmod{21} \quad \text{si et seulement si} \quad \exists k \in \mathbf{Z},\ a - b = 21k.$$

1. [1pt] Montrer qu'il s'agit d'une relation d'équivalence.

2. [1pt] On note $\mathbf{Z}/21\mathbf{Z}$ l'ensemble quotient par cette relation et on considère l'application $f : \mathbf{Z} \longrightarrow \mathbf{Z}/21\mathbf{Z}$ définie par $f(n) := \overline{n}$ où $\overline{n}$ désigne la classe de l'entier n modulo 21. Cette application est-elle injective ? Surjective ? Bijective ?

3. [2pts] Considérons le morphisme d'anneaux $\theta : \mathbf{Z} \longrightarrow \mathbf{Z}/21\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/13\mathbf{Z}$ défini par

$$\theta(n) := (\overline{n}, \widetilde{n})$$

où $\widetilde{n}$ désigne la classe de l'entier n modulo 13. Calculer l'image de l'entier 43 par l'application θ. Déterminer le noyau $\ker\theta = \{n \in \mathbf{Z},\ \theta(n) = (\overline{0}, \widetilde{0})\}$ de θ.

4. [1pt] On déduit du morphisme θ le morphisme injectif

$$\psi : \mathbf{Z}/273\mathbf{Z} \longrightarrow \mathbf{Z}/21\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/13\mathbf{Z}.$$

Montrer que ce morphisme est bijectif.

5. [1pt] Déterminer $\psi^{-1}((1,0))$ et $\psi^{-1}((0,1))$.

6. [2pts] En déduire les solutions du système de congruences suivant :

$$\begin{cases} n \equiv 5 & \pmod{21} \\ n \equiv 8 & \pmod{13} \end{cases}$$

Exercice 4. [5pts] Soit C le code linéaire binaire de matrice génératrice

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. [1pt] Déterminer la longueur n et la dimension k du code C.

2. [2pts] Combien y a-t-il de mots dans le code C ? Enumérer les mots du code et en déduire la distance minimale d du code C et sa capacité de correction.

3. [1pt] Quels sont les bits de redondance si l'on veut envoyer le message $u = (a, b, c)$?

4. [1pt] Que deduire si le message $(0, 1, 1, 0, 1, 0)$ est reçu ?