Critères de divisibilité.

1. Quel est le problème ?

Déterminer si un nombre entier est divisible par un autre nombre entier est une question fondamentale de l'arithmétique. Il existe un algorithme simple qui permet de répondre à la question et que l'on apprend dès les classes primaires, il s'agit de la *division euclidienne*. Ainsi, un nombre entier a est divisible par un nombre entier b si le reste de la division euclidienne par de a par b est nul.

L'algorithme de la division euclidienne, malgré sa relative simplicité, devient fastidieux s'il faut diviser des grands nombres et les arithméticiens se sont demandés s'il n'y avait pas un moyen de savoir si un nombre a était divisible par un nombre b sans avoir à calculer le reste de la division de a par b. Bien entendu ils se sont attaqués aux divisions les plus simples pour commencer, à savoir comment déterminer si un nombre est divisible par 2, 3, 5, etc.

2. Divisibilité par 2

C'est un critère simple : un nombre n est divisible par 2, on dit aussi que n est *pair*, si son chiffre des unités est un chiffre pair, c'est-à-dire si le chiffre des unités est 0, 2, 4, 6 ou 8. Ainsi 10450312 est pair puisque son chiffre des unités est le chiffre 2 qui est pair.

3. Divisibilité par 3

C'est un peu plus compliqué : un nombre n est divisible par 3 si la somme de ses chiffres est un multiple de 3. Il faut remarquer que ce critère est récurrent, autrement dit si l'on obtient un nombre à plus d'un chiffre en additionnant les chiffres de n, on peut réitérer le calcul jusqu'à ce que le nombre obtenu ne contienne qu'un seul chiffre, auquel cas le critère devient : un nombre n est divisible par 3 si la somme itérée est égale à 0, 3, 6 ou 9. Exemple : le nombre 710734122 est divisible par 3, en effet,

$$\begin{aligned} 7+1+0+7+3+4+1+2+2 &= 27 \\ 2+7 &= 9 \end{aligned}$$

4. Divisibilité par 4

Un nombre n est divisible par 4 si $2 \times d + u$ (itéré) est égal à 0, 4 ou 8 où d désigne le chiffre des dizaines et u le chiffre des unités. Exemple : $n = 1002352$. On a

$$\begin{aligned} 2+2 &= 12 \\ 2\times 1+2 &= 4 \end{aligned}$$

5. Divisibilité par 5

Il suffit que le chiffre des unités soit égal à 0 ou 5, par exemple 30224065 et 12980 sont divisibles par 5.

6. Divisibilité par 6

$6 = 3 \times 2$ et 3 et 2 sont premiers entre eux donc il faut combiner les critères de divisibilité par 3 et par 2.

7. Divisibilité par 7

Le plus compliqué de la série. Le principe est le même que pour le critère de divisibilité par 3, mais avant d'additionner tous les chiffres de n, il faut les pondérer, c'est-à-dire les multiplier par les nombres suivants en partant du chiffre des unités (donc à l'envers) : 1,3,2,−1,−3,−2,1,3,2,−1, etc. Comme pour 3, si la somme est un nombre de plus d'un chiffre, il faut recommencer le processus, la règle devient alors : un nombre n est divisible par 7 si la somme itérée et pondérée de ses chiffres par la série périodique de période $1, 3, 2, -1, -3, -2$ vaut 0 ou 7.

Exemple : 6090 est divisible par 7, en effet :

$$\begin{aligned} 0\times 1+9\times 3+0\times 2+6\times(-1) &= 21 \\ 1\times 1+2\times 3 &= 7 \end{aligned}$$

Autre exemple : 717255 est divisible par 7, en effet :

$$5\times 1+5\times 3+2\times 2+7\times(-1)+1\times(-3)+7\times(-2) = 0$$

8. Divisibilité par 8

Un nombre n est divisible par 8 si $4 \times c + 2 \times d + u$ (itéré) est égal à 0 ou 8 où c désigne le chiffre des centaines, d le chiffre des dizaines et u celui des unités. Exemple : $n = 30536$. On a

$$\begin{aligned} 4\times 5+2+6 &= 32 \\ 2\times 3+2 &= 8 \end{aligned}$$

9. Divisibilité par 9

Exactement comme pour 3, mais la somme des chiffres doit être un multiple de 9 ou la somme itérée doit être égale à 0 ou 9. Exemple : 105903 est divisible par 9 car

$$\begin{aligned} 1+0+5+9+0+3 &= 18 \\ 1+8 &= 9 \end{aligned}$$

10. Divisibilité par 10

Le critère le plus simple, il suffit que le chiffre des unités soit égal à 0.

11. Divisibilité par 11

Même principe que pour 7 avec la série alternée $-1, 1, -1$, etc. Un nombre n est divisible par 11 si la somme itérée et pondérée de ses chiffres par la série alternée de période $-1, 1$ vaut 0.

Exemple : Le nombre 1126455 est divisible par 11, en effet :

$$5 \times (-1) + 5 \times 1 + 4 \times (-1) + 6 \times 1 + 2 \times (-1) + 1 \times 1 + 1 \times (-1) = 0$$

Autre exemple avec 926695 :

$$\begin{aligned} 5 \times (-1) + 9 \times 1 + 6 \times (-1) + 6 \times 1 + 2 \times (-1) + 9 \times 1 &= -11 \\ 1 \times (-1) + 1 \times 1 &= 0 \end{aligned}$$

Il est alors très simple de remarquer que le nombre constitué d'un million de chiffres tous égaux à 1 est divisible par onzele nombre de ses chiffres est pair…

12. Divisibilité par 12

$12 = 4 \times 3$ et 3 et 4 sont premiers entre eux donc il faut combiner les critères de divisibilité par 3 et par 4.

13. Divisibilité par 13

Même principe que pour 7 avec la suite périodique de période $1, -3, -4, -1, -3, 4$.

14. Tableau récapitulatif simplifié

Tous les critères peuvent être décrits à l'aide des suites de coefficients de pondération, le résultat de la somme itérée devant toujours donner un nombre à un chiffre multiple du diviseur souhaité. On résume les différentes suites dans le tableau :

diviseur						suite					résultat attendu
2	…	0	0	0	0	0	0	0	**0**	1	0, 2, 4, 6, 8
3	…	1	1	1	1	1	1	1	1	**1**	0, 3, 6, 9
4	…	0	0	0	0	0	0	**0**	2	1	0, 4, 8
5	…	1	1	1	1	1	1	1	1	**1**	0, 5
7	…	2	3	1	**−2**	**−3**	**−1**	**2**	**3**	**1**	0, 7
8	…	0	0	0	0	0	**0**	4	2	1	0, 8
9	…	1	1	1	1	1	1	1	1	**1**	0, 9
10	…	0	0	0	0	0	0	0	**0**	1	0
11	…	1	1	−1	1	−1	1	−1	**1**	**−1**	0
13	…	−4	−3	1	**4**	**3**	**−1**	**−4**	**−3**	**1**	0

Il suffit alors de placer les chiffres du nombre n sous les valeurs correspondantes du tableau.

15. Application

Quand on veut transformer une fraction en fraction irréductible, il faut diviser le numérateur et le dénominateur par le plus grand facteur commun, autrement dit leur PGCD (Plus Grand Commun Dénominateur en langage mathématique pompeux). Pour calculer le PGCD de deux nombres entiers a et b, on peut pour des petites valeurs de a et b, les décomposer en produit de facteurs premiers et reconstituer la valeur du PGCD en multipliant tous les facteurs qui sont communs aux deux décompositions.

Exemple : calculer le pgcd de 134 et 308.

La méthode la plus efficace est néanmoins l'algorithme d'Euclide : on remplace le plus grand des deux nombre par