Mathématiques pour l'informatique. L1 Informatique I23.

Contrôle Continu Terminal - Mai 2023

Correction des exercices

Exercice 1. Formalisez les propositions suivantes en formules de la logique propositionnelle. Pour cela définissez pour chaque question la/les variable(s) propositionnelle(s) et leur interprétation *avant* de donner une formule (aucun point ne sera accordé sinon). Respectez les négations dans les énoncés.

Exemple : *"Il n'y a pas de fumée sans feu"*. On définit deux variables propositionnelles, P interprétée par *"Il y a de la fumée"* et Q interprétée *"Il y a du feu"*. Une formule possible est alors $\neg(P \land \neg Q)$.

1) *"Ce n'est pas de la pluie qui tombe mais de la neige."*

2) *"Chloé partira si Sofia est en retard et Yacine est à l'heure."*

3) *"Qui vole un œuf vole un bœuf".*

4) *"Il est impossible de répondre sans être concentré ni réfléchir."*

5) *"Dépêche toi, sinon on sera en retard".*

6) *"Que vous ayez fini ou non votre repas, il faudra vous coucher."*

Solution. Il s'agit des propositions qui traduisent les énoncés "au plus proche".

1) P : *"C'est de la pluie qui tombe"* et N : *"C'est de la neige qui tombe".*

$$\neg P \land N.$$

2) C :*"Chloé partira"*, S :*"Sofia est en retard"* et Y :*"Yacine est à l'heure".*

$$S \land Y \Rightarrow C.$$

3) O :*"On vole un œuf"*, B :*"On vole un bœuf".*

$$O \Rightarrow B.$$

4) R :*"On répond"*, C :*"On est concentré"* et F :*"On réfléchi".*

$$\neg\big(R \land (\neg C \land \neg F)\big) \quad \text{ou} \quad (\neg C \land \neg F) \Rightarrow \neg R.$$

5) D :*"Tu te dépêches"*, R :*"On sera en retard".*

$$\neg D \Rightarrow R.$$

6) R :*"Vous avez fini votre repas"*, C :*"Vous vous couchez".*

$$(R \lor \neg R) \Rightarrow C.$$

Exercice 2. Formalisez les énoncés suivants en logique des prédicats.

1) Les entiers naturels multiples de 6 sont divisibles par 3.

2) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de nombres réels majorée.

3) La fonction h est la somme de deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

4) T est l'ensemble des triplets d'entiers compris entre 2 et 12 rangés dans l'ordre croissant.

Solution. D'autres expressions que celles proposées ci-dessous sont possibles.

1) $(n \in \mathbb{N}) \ \land \ \big((\exists k \in \mathbb{N}\ n = 6k) \Rightarrow (3 \mid n)\big).$

2) $\big((u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}\big) \ \land \ (\exists M \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{N}\ u_n \leq M).$

3) $(h \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}) \ \land \ \big(\exists (f,g) \in (\mathbb{R}^{\mathbb{R}})^2 \ \ \forall x \in \mathbb{R}\ h(x) = f(x) + g(x)\big).$

4) $T = \big\{(a,b,c) \in [\![2,12]\!]^3 \ \mid a \leq b \leq c\big\}.$

Exercice 3. Les énoncés sur les permutations étaient des énoncés types traités en TD et dont les résultats sont calculables via les applications intégrées au cours en ligne.

Exercice 4. Vos réponses *doivent* être *justifiées.*

L'université organise des sondages de satisfaction auprès des étudiant·e·s pour connaître leur avis sur des sujets variés avec le codage suivant :

$\mathbf{-1}$: Plutôt négatif $\qquad$ $\mathbf{+1}$: Plutôt positif

1) Quel modèle mathématique proposez-vous pour décrire les résultats d'un sondage anonyme ? Même question si le sondage n'est pas anonyme ?

2) Si m désigne le nombre d'étudiant·e·s qui ont participé du sondage, combien de résultats différents sont possibles si ce sondage est anonyme ? Même question s'il n'est pas anonyme et que l'on distingue deux réponses identiques faites par des étudiant·e·s différent·e·s ?

Si un·e étudiant·e ne répond pas à un sondage, le sondeur note 0 pour l'absence de réponse. Soit E un ensemble fini de cardinal n et S l'ensemble des applications de E dans $\{-1, 0, +1\}$. On définit l'application $H : S \to [\![0,n]\!]^3$ par

$$H(s) := \big(\,|s^{-1}(-1)|\,,\ |s^{-1}(0)|\,,\ |s^{-1}(1)|\,\big). \tag{1}$$

On rappelle que si E est un ensemble fini, $|E|$ désigne son cardinal.

3) Un sondage s effectué sur l'ensemble des étudiant·e·s

$$E := \{Léa,\ Tom,\ Bob,\ Ian,\ Vin\}$$

a donné les réponses suivantes : *Léa* : $+1$, *Tom* : $+1$, *Ian* : -1. Les étudiants *Bob* et *Vin* n'ont pas répondu. Calculez $H(s)$.

4) Écrivez une fonction *Python* `H(s)` qui calcule la fonction H. Le sondage s est codé par un tuple constitué des n résultats du sondage et la fonction renvoie le triplet $H(s)$.

5) Calculez le cardinal de S et de $H(S)$ pour un ensemble E de 3 étudiant·e·s.

6) Quelle condition l'ensemble E doit-il satisfaire pour que l'application H soit injective ? Cette condition est-elle suffisante ?

7) L'application H est-elle surjective ?

Soit s un sondage défini sur un ensemble d'étudiant·e·s E et $\mathscr{R}$ la relation binaire définie sur E par $x \mathscr{R} y$ si et seulement si $s(x) = s(y)$.

8) Montrez que $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence sur E.

9) Soit $(a, b, c) := H(s)$. En déduire que

$$|E| = a + b + c. \tag{2}$$

10) Équipez l'ensemble $\{-1, 0, +1\}$ d'une loi additive et multiplicative dont vous donnerez les tables pour en faire un anneau.

Solution. Les résultats devaient être *justifiés*.

1) Si le sondage est anonyme, le modèle mathématique doit pouvoir distinguer les différents résultats possibles du sondage mais sans distinguer les choix individuels s'ils sont identiques. Si on note n le nombre d'étudiant·e·s sondés, on pourrait par exemple choisir de décrire le résultat du sondage par un couple $(n_-, n_+) \in [\![0, n]\!]^2$ où n_- désigne le nombre de votes négatifs et n_+ le nombre de votes positifs sachant que $n = n_- + n_+$.

NB. On pouvait anticiper l'étude ultérieure en proposant un modèle intégrant la possibilité qu'un étudiant ne veuille pas répondre au sondage, par exemple un triplet $(n_-, s, n_+) \in [\![0, n]\!]^3$ où s est le nombre d'étudiant·e·s qui n'ont pas répondu, mais même dans ce cas, on pouvait encore conserver le modèle précédent avec un simple couple $(n_-, n_+) \in [\![0, n]\!]^2$, puisque s peut être déduit grâce à $s = n - (n_- + n_+)$.

Si le sondage n'est plus anonyme, des réponses identiques faites par des étudiant·e·s différents doivent être distinguées. Si n désigne le cardinal de l'ensemble des étudiant·e·s E, on peut numéroter les étudiant·e·s de 1 à n et les résultats peuvent être codés par un n-uplet $(r_1, r_2, \ldots, r_n) \in \{-1, +1\}^n$, la réponse r_i étant celle fournie par l'étudiant·e numéro i.

2) Si n désigne le nombre d'étudiant·e·s d'un sondage anonyme, le nombre de votes négatifs n_- est compris entre 0 et n et définit un couple $(n_-, n - n_-)$ résultat du sondage. Réciproquement tout couple $(n_-, n - n_-) \in [\![0, n]\!]^2$ définit un nombre de votes négatifs n_{-1}. L'ensemble des couples résultats possibles est donc en bijection avec l'intervalle $[\![0, n]\!]$ de cardinal $n + 1$.

Si le sondage n'est plus anonyme, chaque n-uplet de l'ensemble $\{-1, +1\}^n$ définit un résultat possible et réciproquement, il y a bijection entre les différents résultats possibles et l'ensemble $\{-1, +1\}^n$ de cardinal 2^n.

3) La fonction H (l'histogramme) calcule la répartition des votes d'un sondage s et renvoie le triplet constitué respectivement du nombre de réponses négatives, du nombre d'absence de réponses et du nombre de réponses positives. On a donc pour l'exemple proposé $H(s) = (1, 2, 2)$.

4) Le codage en *Python* de cette fonction n'a rien de bien compliqué :

```
def H(s):
  pos, neg = 0, 0
  for reponse in s:
    if reponse == -1:
      neg = neg + 1
    elif reponse == 1:
      pos = pos + 1
  return (neg, len(s) - (neg + pos), pos)
```

ou encore :

```
def H(s):
  triplet = [0,0,0]
  for reponse in s:
     triplet[reponse] += 1
  return tuple(triplet[2:] + triplet[:2])
```

5) L'ensemble des sondages S est défini comme l'ensemble des applications d'un ensemble fini E de n étudiant·e·s dans l'ensemble $\{-1, 0, +1\}$, autrement dit l'ensemble $\{-1, 0, +1\}^E$ dont le cardinal est $3^{|E|} = 3^n$, soit 27 pour $n = 3$. L'image $H(S)$ de l'ensemble S par l'application H est *par* *définition* le sous-ensemble de $[\![0,n]\!]^3$ constitué de toutes les images des éléments de S par H :

$$H(S) := \{H(s) \mid s \in S\}.$$

Pour un ensemble E de trois étudiant·e·s, on peut énumérer facilement tous les résultats possibles $H(s)$ des sondages s, ce sont tous les triplets dont la somme des 3 valeurs est égale à 3 :

$$\begin{aligned} H(S) = \{&(3,0,0),(2,1,0),(2,0,1),(1,2,0),(1,1,1),\\ &(1,0,2),(0,3,0),(0,2,1),(0,1,2),(0,0,3)\}. \end{aligned}$$

6) Pour qu'une application $f : X \to Y$ où X et Y sont finis, soit injective, nous savons qu'il est nécessaire que $|X| \leq |Y|$, et donc pour l'application H que

$$3^n \leq (n+1)^3. \tag{3}$$

L'exponentielle croît bien plus rapidement qu'un cube, et seules les valeurs de n inférieures ou égales à 4 satisfont l'inégalité (3). La condition n'est pas suffisante cependant pour que H soit injective. En effet, prenons par exemple un ensemble de trois étudiant·e·s $E := \{0,1,2\}$ et les deux sondages s et s' suivants :

x	0	1	2
$s(x)$	$+1$	0	0
$s'(x)$	0	0	$+1$

On a $s \neq s'$ et $H(s) = H(s') = (0,2,1)$.

7) L'application ne peut pas être surjective avec pour ensemble d'arrivée l'ensemble $[\![0,n]\!]^3$. En effet, le triplet (n,n,n), entre autres, n'a pas d'antécédent puisque la somme des trois valeurs ne peut être égale au nombre d'étudiant·e·s n dès que $n > 0$.

8) Pour être une relation d'équivalence, la relation $\mathscr{R}$ doit être *réflexive*, *symétrique* et *transitive*, donc doit satisfaire respectivement les trois propositions suivantes :

$$\forall x \in E \quad x \mathscr{R} x$$
$$\forall (x,y) \in E^2 \quad x \mathscr{R} y \Leftrightarrow y \mathscr{R} x$$
$$\forall (x,y,z) \in E^3 \quad (x \mathscr{R} y) \wedge (y \mathscr{R} z) \Rightarrow (x \mathscr{R} z)$$

Comme $\forall x \in E \ s(x) = s(x)$, la relation est réflexive. Elle est également symétrique puisque $\forall (x,y) \in E^2 \ s(x) = s(y) \Rightarrow s(y) = s(x)$. Elle est finalement transitive car $\forall (x,y,z) \in E^3 \ (s(x) = s(y)) \wedge (s(y) = s(z)) \Rightarrow (s(x) = s(z))$ par *transitivité de l'égalité.*

9) Une classe d'équivalence pour cette relation contient exactement les étudiant·e·s qui ont donné la même réponse ou contient exactement ceux qui n'ont pas répondu au sondage. Il peut, bien sûr n'y avoir qu'une seule classe d'équivalence ou deux mais dans tous les cas, ces classes d'équivalence forment une *partition* de l'ensemble des étudiant·e·s. La valeur a (resp. b et c) est égale au cardinal de la classe des réponses négatives (resp. non-réponses et réponses positives) si cette classe existe, et égale à 0 sinon. On peut alors appliquer la *formule de sommation* et en déduire l'égalité (2).

10) Il suffit de remarquer que -1, 0 et 1 sont des représentants de l'anneau quotient $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, le représentant usuel 2 a simplement été remplacé par -1 :

$+$	-1	0	$+1$
-1	$+1$	-1	0
0	-1	0	$+1$
$+1$	0	$+1$	-1

$\times$	-1	0	$+1$
-1	$+1$	0	-1
0	0	0	0
$+1$	$+1$	0	-1

TABLE 1. Tables d'addition et de multiplication dans $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.