Mathématiques pour l'informatique. L1 Informatique I23.

Exercices

Exercice 1. Le jeu du *morpion* consiste à placer alternativement une croix $\times$ (joueur A) puis un rond $\circ$ (joueur B) dans l'une des cases vierges d'un plateau 3×3. Le premier joueur qui aligne 3 symboles identiques sur une ligne, une colonne ou une diagonale, a gagné. Dans l'exemple suivant, le joueur A gagne :

$\circ$		$\times$
$\circ$	$\times$	
$\times$		

On définit deux variables propositionnelles $O_{i,j}$ et $X_{i,j}$ pour chaque case (i,j) du plateau dont l'interprétation est : la variable $O_{i,j}$ (resp. $X_{i,j}$) est *vrai* si et seulement si la case (i,j) à la ligne i et à la colonne j) contient $\circ$ (resp. $\times$). Écrivez une formule qui exprime chacune des conditions suivantes :

(1) La case $(2,2)$ n'est pas vierge.

(2) La case $(1,1)$ ne contient pas à la fois un rond et une croix.

(3) Aucune case ne contient à la fois un rond et une croix.

(4) La deuxième colonne ne contient que des croix.

(5) La diagonale $\diagup$ contient 3 croix.

(6) Le plateau est vierge.

(7) La première ligne contient au moins un rond mais pas trois.

(8) Le joueur A gagne la partie.

NB. On peut résumer une suite de conjonctions ou de disjonctions avec les écritures suivantes (P désigne la famille de variables propositionnelles O ou X) :

$$\bigwedge_{l=1}^{3} P_{l,c} := P_{1,c} \wedge P_{2,c} \wedge P_{3,c} \quad \text{avec } c = 1 \text{ ou } c = 2 \text{ ou } c = 3.$$

$$\bigwedge_{c=1}^{3} P_{l,c} := P_{l,1} \wedge P_{l,2} \wedge P_{l,3} \quad \text{avec } l = 1 \text{ ou } l = 2 \text{ ou } l = 3.$$

$$\bigvee_{l=1}^{3} P_{l,c} := P_{1,c} \vee P_{2,c} \vee P_{3,c} \quad \text{avec } c = 1 \text{ ou } c = 2 \text{ ou } c = 3.$$

$$\bigvee_{c=1}^{3} P_{l,c} := P_{l,1} \vee P_{l,2} \vee P_{l,3} \quad \text{avec } l = 1 \text{ ou } l = 2 \text{ ou } l = 3.$$

Solution. Les expressions logiquement équivalentes et/ou qui utilisaient d'autres opérateurs logiques que les trois opérateurs usuels *non*, *et* et *ou* étaient bien sûr acceptées. L'utilisation de quantificateurs n'était pas pertinente, il s'agit d'expressions en logique propositionnelle et pas en logique des prédicats.

(1) La case $(2,2)$ n'est pas vierge :

$$O_{2,2} \vee X_{2,2}.$$

(2) La case $(1,1)$ ne contient pas à la fois un rond et une croix :

$$\neg(O_{1,1} \wedge X_{1,1}).$$

(3) Aucune case ne contient à la fois un rond et une croix :

$$\bigwedge_{l=1}^{3} \left(\bigwedge_{c=1}^{3} \neg(O_{l,c} \wedge X_{l,c}) \right).$$

(4) La deuxième colonne ne contient que des croix :

$$\bigwedge_{l=1}^{3} (X_{l,2} \wedge \neg O_{l,2}).$$

(5) La diagonale $\diagup$ contient 3 croix :

$$X_{3,1} \wedge X_{2,2} \wedge X_{1,3}.$$

(6) Le plateau est vierge :

$$\bigwedge_{l=1}^{3} \left(\bigwedge_{c=1}^{3} (\neg (X_{l,c} \vee O_{l,c})) \right).$$

(7) La première ligne contient au moins un rond mais pas trois :

$$\left(\bigvee_{c=1}^{3} O_{1,c}\right) \wedge \left(\neg\left(\bigwedge_{c=1}^{3} O_{1,c}\right)\right).$$

(8) Le joueur A gagne la partie :

$$\left(\bigvee_{l=1}^{3}\Big(\bigwedge_{c=1}^{3} X_{l,c}\Big)\right) \vee \left(\bigvee_{c=1}^{3}\Big(\bigwedge_{l=1}^{3} X_{l,c}\Big)\right) \vee \left(\bigwedge_{i=1}^{3} X_{i,i}\right) \vee \left(\bigwedge_{i=1}^{3} X_{i,4-i}\right).$$

Exercice 2. On considère un ensemble fini $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ de cardinal $n \geq 1$ et l'ensemble $\mathscr{B} := \{0,1\}$. Soit A une partie de X, on définit les applications $1_A : X \to \mathscr{B}$ et $\chi : \mathscr{P}(X) \to \mathscr{B}^n$ par

(1)
$$1_A(x) := \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad \text{et} \quad \chi(A) := \big(1_A(x_1), 1_A(x_2), 1_A(x_3), \dots, 1_A(x_n)\big).$$

On définit enfin l'application *poids* $w : \mathscr{B}^n \to \mathbb{N}$ par

(2)
$$w(b_1, b_2, \dots, b_n) := \#\{i \in [1,n] \mid b_i \neq 0\}.$$

(1) Calculez les deux n-uplets binaires $\chi(\varnothing)$ et $\chi(X)$ et calculez leurs poids $w(\chi(\varnothing))$ et $w(\chi(X))$.

(2) Quelle est l'image d'une partie $A \in \mathscr{P}(X)$ par l'application $w \circ \chi$?

(3) Calculez l'ensemble $(w \circ \chi)^{-1}(1)$.

(4) Démontrez que l'application χ est injective.

(5) Démontrez que l'application χ est surjective.

(6) Citez le théorème du cours qui fournit le cardinal de $\mathscr{B}^n$ et en déduire celui de $\mathscr{P}(X)$.

(7) Soit $p \in \mathbb{N}$ avec $p \leq n$. Calculez le nombre de n-uplets binaires de poids p.

On munit $\mathscr{P}(X)$ de la réunion $\cup$ et $\mathscr{B}^n$ de la loi additive *produit* $+$ de la disjonction logique $+$ du calcul booléen, c'est-à-dire $(a_1, \dots, a_n) + (b_1, \dots, b_n) := (a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n)$.

(8) Les lois des magmas $(\mathscr{P}(X), \cup)$ et $(\mathscr{B}^n, +)$ sont-elles associatives, commutatives ? Admettent-elles un élément neutre ? Les éléments des ensembles associés sont-ils symétrisables ?

(9) Démontrez que l'application χ est un morphisme.

(10) L'application $w \circ \chi$ est-elle un morphisme de $(\mathscr{P}(X), \cup)$ dans $(\mathbb{N}, +)$? Justifiez.

Solution.

(1) $\chi(\varnothing) = (0, 0, \dots, 0)$, $\chi(X) = (1, 1, \dots, 1)$ et $w(\chi(\varnothing)) = 0$, $w(\chi(X)) = n$.

(2) $w \circ \chi(A) = \operatorname{card}(A)$.

(3) $(w \circ \chi)^{-1}(\{1\}) = \mathscr{P}_1(X)$ l'ensemble des singletons $\{x\}$ tels que $x \in X$:

$$(w \circ \chi)^{-1}(\{1\}) = \{\{x_1\}, \dots, \{x_n\}\}.$$

(4) Supposons que $\chi(A) = \chi(B)$ et montrons que $A = B$, soit d'après l'axiome d'extension que $A \subseteq B$ et $B \subseteq A$. On a

$$\forall i \in [1,n] \quad 1_A(x_i) = 1_B(x_i).$$

Si $x \in A$ alors $1_A(x) = 1$, or $1_A(x_i) = 1_B(x_i)$ ce qui entraîne $1_B(x) = 1$ par transitivité de l'égalité, soit $x \in B$. On prouve que $B \subseteq A$ de façon symétrique en échangeant le rôle des ensembles A et B.

(5) Soit $b := (b_1, b_2, \dots, b_n) \in \mathscr{B}^n$, alors la partie $A := \{x_i \mid i \in [1,n]\ b_i = 1\}$ est un antécédent de b.

(6) Nous savons (cf. cours) que le cardinal du produit cartésien d'une famille finie d'ensembles finis est le produit de leurs cardinaux. On a donc $\#\mathscr{B}^n = (\#\mathscr{B})^n = 2^n$. Comme l'application χ est injective et surjective, elle est bijective et les ensembles $\mathscr{P}(X)$ et $\mathscr{B}^n$ ont le même cardinal 2^n.

(7) Il faut placer p valeurs 1 dans le n-uplet binaire pour qu'il soit de poids p. On doit donc choisir p bits parmi n, c'est le nombre de combinaisons de p parmi n soit le coefficient binomial $\binom{p}{n}$.

(8) Les deux magmas sont associatifs, unifères et commutatifs. L'élément neutre de $\mathscr{P}(X)$ est l'ensemble vide $\varnothing$ et celui de $\mathscr{B}^n$ est le n-uplet $(0, \dots, 0)$. Les seuls éléments symétrisables de ces deux magmas sont leurs éléments neutres.

(9) On se donne deux parties quelconques A et B de X et il faut montrer que $\chi(A \cup B) = \chi(A) + \chi(B)$ autrement dit que

$$\forall i \in [1,n] \quad 1_{A \cup B}(x_i) = 1_A(x_i) + 1_B(x_i).$$

Si $x_i \in A \cup B$ alors d'une part $1_{A \cup B}(x_i) = 1$ et d'autre part $x_i \in A$ **ou** $x_i \in B$ et donc $1_A(x_i) = 1$ ou $1_B(x_i) = 1$. Par conséquent $1_A(x_i) + 1_B(x_i) = 1 = 1_{A \cup B}(x_i)$. Si $x_i \notin A \cup B$ alors d'une part $1_{A \cup B}(x_i) = 0$ et d'autre part $x_i \notin A$ **et** $x_i \notin B$ et donc $1_A(x_i) = 0$ et $1_B(x_i) = 0$. Finalement $\chi(A \cup B) = \chi(A) + \chi(B)$.

(10) Non, car le cardinal de la réunion de deux ensembles est égal à la somme de leurs cardinaux si et seulement s'ils sont disjoints.

Exercice 3. Soit la permutation
$$\sigma := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 \\ 2 & 4 & 1 & 5 & 6 & 3 & 7 & 9 & 8 & 13 & 12 & 10 & 11 \end{pmatrix}.$$

(1) Trouvez une décomposition de σ en produits de cycles à supports deux-à-deux disjoints.

(2) Quel est le type de la permutation σ ?

(3) Décomposez σ en produits de transpositions. Justifiez.

(4) Calculez la signature de σ. Justifiez.

(5) Peut-on trier la liste $[2, 4, 1, 5, 6, 3, 7, 9, 8, 13, 12, 10, 11]$ en effectuant un nombre *pair* d'échanges entre valeurs de la liste ? Justifiez.

(6) Calculez l'ordre de la permutation σ. Justifiez.

(7) Calculez σ^{2019}. Justifiez.

(8) Calculez $(4, 8, 3, 9)(8, 9)(9, 3, 8, 4)$. Que peut-on dire des transpositions $(8, 9)$ et $(3, 4)$?

Solution.

(1) $\sigma = (1, 2, 4, 5, 6, 3)(8, 9)(10, 13, 11, 12)$.

(2) On ordonne les longueurs des cycles de la décomposition, la permutation est donc du type $(2, 4, 6)$.

(3) Un p-cycle $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ se décompose en un produit de transpositions $\prod_{i=1}^{p-1}(x_i, x_{i+1})$ (cf. cours) d'où
$$\sigma = (1, 2)(2, 4)(4, 5)(5, 6)(6, 3)(8, 9)(10, 13)(13, 11)(11, 12).$$

(4) On a $n = 13$ et il y a exactement 4 orbites (l'une est le singleton $\{7\}$ qui n'apparaît donc pas dans la décomposition en produit de cycles) d'où
$$\varepsilon(\sigma) = (-1)^{13-4} = (-1)^9 = -1.$$

(5) Non, cette liste est la permutation σ qui se décompose en un produit *impair* de transpositions/échanges puisque $\varepsilon(\sigma) = -1$.

(6) L'ordre de cette permutation est le PPCM des ordres des cycles de sa décomposition en produit de cycles à supports disjoints (cf. cours). Ces ordres sont $2, 4$ et 6 de PPCM 12, donc $\sigma^{12} = \mathrm{Id}$.

(7) La division euclidienne de 2019 par 12 fournit
$$2019 = 12 \times \underset{q}{168} + \underset{r}{3}.$$
On en déduit que $\sigma^{2019} = (\sigma^{12})^{168}\sigma^3 = \mathrm{Id}^{168}\sigma^3 = \sigma^3$

Et on obtient
$$\sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 \\ 5 & 6 & 4 & 3 & 1 & 2 & 7 & 9 & 8 & 12 & 13 & 11 & 10 \end{pmatrix}$$

(8) Il suffit de calculer les images des entiers 3, 4, 8 et 9, les autres n'appartenant pas aux supports des permutations de la composition :
$$(4, 8, 3, 9)\mathbf{(8,9)}(9, 3, 8, 4) = \mathbf{(3,4)}.$$
Le 4-cycle $c := (4, 8, 3, 9)$ est l'inverse du 4-cycle $(9, 3, 8, 4)$ (cf. cours), ainsi $(3, 4) = c\,(8, 9)\,c^{-1}$ ce qui signifie par définition que les transpositions $(3, 4)$ et $(8, 9)$ sont *conjuguées*.