Algorithmique. Memento de combinatoire

1. Quelques définitions

Soient E et F deux ensembles. Une application $f : E \to F$ est dite *injective* si deux éléments distincts de E ont des images distinctes (contraposée : $\forall (x,y) \in E \times E,\ f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$) ; elle est dite *surjective* si tout élément de l'ensemble d'arrivée F admet au moins un antécédent ($\forall y \in F,\ \exists x \in E \mid f(x) = y$). L'application f est dite *bijective* si elle est à la fois injective et surjective.

Deux ensembles E et F sont dits *équipotents*, ce que l'on note $E \approx F$, s'il existe une bijection $f : E \to F$. Si a et b sont deux entiers naturels, on note $[a,b] := \{n \in \mathbf{N} \mid a \leq n \leq b\}$. Un ensemble E est dit *fini* s'il existe un entier n, appelé *cardinal de* E tel que $E \approx [1,n]$, on le note $\#E$ ou $|E|$. Si E n'est pas fini, il est dit *infini*.

Soit $u : E \to F$ une application. Si $E = \mathbf{N}$ (resp. si E est fini), u est appelée *suite* (resp. *séquence*) d'éléments de F. On note $u_k := u(k)$ et $(u(k))_{k\in E}$ cette suite u.

On appelle *famille d'ensembles indexée par* I toute application E de I dans les parties d'un ensemble. On la note $(E_i)_{i\in I}$ avec $E_i := E(i)$.

2. Formulaire

Dans toute la suite, E et F désignent deux ensembles finis et totalement ordonnés quand cette propriété est nécessaire avec $n = \#E$ et $p = \#F$. On dénombre les

- **couples de** $E \times F$: $\boxed{\#(E \times F) = n.p}$
- **applications de** $E \to F$: $\boxed{\#F^E = p^n}$
- **parties de** E : $\boxed{\#\mathcal{P}(E) = 2^n}$
- **injections de** $E \to F$ $(n \leq p)$: $\boxed{A_p^n := \dfrac{p!}{(p-n)!}}$
- **bijections de** $E \to E$: $\boxed{\#\mathfrak{S}_n = n! := n(n-1)(n-2)\dots 1}$
- **parties de** E **de cardinal** p : $\boxed{C_n^p = \dbinom{n}{p} := \dfrac{n!}{(n-p)!p!}}$
- **rangements de** n **objets dans** p **boites numérotées** : $\boxed{R_n^p := \dfrac{(p+n-1)!}{(p-1)!}}$
- **applications croissantes** : $\boxed{\dfrac{R_n^p}{n!}}$
- **partitions de** E (nombres de *Bell*) : $\boxed{B_{n+1} := \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k, \quad \text{avec } B_0 = 1.}$
- **partitions de** E **en** p **classes** (nombres de Stirling) :

$$\boxed{S_{n+1}^p := S_n^{p-1} + pS_n^p = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} S_k^{p-1}, \quad \text{avec } S_n^1 = S_n^n = 1}$$

- **surjections** de E dans F : $\boxed{p!S_n^p}$

3. Autres résultats

Théorème 1. *Soient E et F deux ensembles finis de même cardinal. Alors une application $f : E \to F$ est injective si et seulement si elle est surjective.*

Théorème 2 (de récurrence). *Soit $P(n)$ un prédicat sur $\mathbf{N}$ et $a \in \mathbf{N}$. Si $P(n)$ satisfait les deux propriétés suivantes :*

(1) $P(a)$ est vrai,

(2) $\forall n \in \mathbf{N}, \quad P(n) \Rightarrow P(n+1)$,

alors $P(n)$ est vrai pour tout entier $n \geq a$.

- **sommation** : Soit $(E_i)_{i\in I}$ une partition d'un ensemble fini E :

$$\#E = \sum_{i\in I} \#E_i.$$

- **série** : Soit $S_n := \sum_{i=0}^{n} u_i$ la somme partielle de la série arithmétique (resp. géométrique) de terme général u_n et de raison $q \neq 1$.

$$S_n = \frac{(n+1)(nq+2u_0)}{2} \qquad (\text{resp. } S_n = \frac{u_0(q^{n+1}-1)}{q-1}).$$

- **triangle de Pascal** : Soient p et n deux entiers, $0 \leq p \leq n$:

$$\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p} = \binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1} \quad \text{et} \quad \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} = 2^n.$$

- **binôme de Newton** : Soient a, b deux éléments d'un anneau commutatif :

$$(a+b)^n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} a^p b^{n-p}.$$

- **des tiroirs** : Si on range n objets dans p tiroirs, alors un des tiroirs contient au moins $[n/p]$ objets où $[x]$ est la partie entière du réel x.
- **des bergers** : Soient E et F finis et $f : E \to F$ une surjection telle que tout élément de F admet exactement k antécédents, alors $\#E = k\#F$.
- **deux sommes utiles** : Soient $q \neq 1$ et n deux entiers.

$$\sum_{k=0}^{n} kq^k = \frac{q}{(q-1)^2}[q^n(n(q-1)+1)+1] \qquad \sum_{p=0}^{n} p\binom{n}{p} = n2^{n-1}$$