L2 Informatique - Algorithmique - Session 1

Mercredi 7 décembre 2016. 09h00-11h00. T1-301

La précision et la clarté de votre rédaction sont *fondamentales*. Documents interdits. Durée 2h00. Le barème indiqué est *approximatif*.

IMPORTANT. Avant d'écrire un algorithme en pseudo-langage algorithmique, décrivez le brièvement *en français*. D'autre part, pour toutes les questions de complexité, précisez :

(1) Ce que désigne la/les variable(s) des fonctions de complexité $\hat{T}$, $\check{T}$, $\bar{T}$;

(2) S'il y a lieu de distinguer ces trois fonctions, meilleur des cas, pire des cas et cas moyen (le calcul de ce dernier n'est pas demandé) ;

(3) Quelles instructions vous comptabilisez et pourquoi vous les considérez représentatives de l'algorithme.

Exercice 1. [3pts] (a) Soit $q \in \mathbf{R}$ et $n \in \mathbf{N}$. Calculez la somme

$$\sum_{i=0}^{n} q^i - i.$$

(b) Démontrez que

$$\sum_{i=1}^{n} \log_2 i = O(n \log n).$$

Indication : majorez la somme par une intégrale.

Exercice 2. [3pts] On considère la liste $L = [5, 3, 4, 1, 2, 7, 9, 8, 6]$ et l'arbre binaire équilibré qui lui est associé.

(a) Quel est le *plus petit* indice de cette liste tel que le nœud associé ne respecte pas la propriété APO ? On rappelle qu'un nœud viole la propriété APO s'il n'est pas supérieur à son/ses fils et que la numérotation de la liste commence à 1.

(b) Transformez cette liste en *tas* en dessinant l'arbre binaire *à chaque application* de l'algorithme ENTASSER et en distinguant le nœud auquel il est appliqué.

Exercice 3. [6pts] Un polynôme $P(X) \in \mathbf{R}[X]$ de degré $n \in \mathbf{N}$ où

$$P(X) = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \cdots + a_n X^n$$

est représenté à l'aide d'une liste $P = [a_0, a_1, \ldots, a_n]$ de $n+1$ "flottants" indexée de 0 à n.

(a) Écrivez un algorithme PRODUIT(P, Q) qui renvoie le polynôme produit des polynômes P et Q.

(b) Calculez la complexité de votre algorithme exprimée en fonction de n et m, les degrés respectifs des polynômes P et Q ? NB.

Exercice 4. [4pts] (a) Écrivez un algorithme sur la machine RAM qui calcule la moyenne arithmétique d'une liste de nombres (la fin de la liste sur la bande d'entrée est matérialisée par la valeur nulle) et renvoie sur la bande de sortie cette moyenne ainsi que le nombre de valeurs lues (excepté la valeur 0 d'entrée).

(b) Quelle est la complexité de votre algorithme ?

Exercice 5. [6pts] Soient $u = u_1 u_2 \ldots u_n$ et $v = v_1 v_2 \ldots v_m$ deux mots sur un alphabet A. On dit que u est une *portion* de v, s'il existe un entier k tel que $1 \leq k \leq m - n + 1$ et $\forall i \in [1, n],\ u_i = v_{k+i-1}$. Par exemple, ***ami*** est une portion de longueur 3 du mot *ex**ami**ner*.

(a) Combien y-a-t-il de portions de longueur n d'un mot de longueur m ?

(b) Écrivez un algorithme ESTPORTION(u, v) qui renvoie `vrai` si u est une portion de v et `faux` sinon. On notera $u[i]$ le i-ème terme de la séquence u.

(c) Calculez la complexité de cet algorithme dans le meilleur des cas et dans le pire des cas en fonction des longueurs n et m des mots u et v.